Teoría de las decisiones y de los juegos

Tema 3:

Juegos dinámicos con información completa

1

¿Qué caracteriza a los juegos dinámicos con información completa?

Supuestos básicos:

- Elección secuencial.
- Información completa de pagos, estrategias, número de jugadores.
- Racionalidad (cada uno maximiza su pago).
- Conocimiento generalizado (no sólo mutuo) de la racionalidad: "Yo soy racional (nivel 0) y sé que los otros jugadores son racionales (nivel 1) y también sé que ellos saben que yo sé que ellos son racionales (nivel 2) …. *ad infinitum*".

2

Conceptos de solución

- Inducción hacia atrás.
- Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

3

Se dividen en

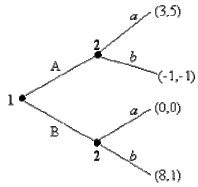
- juegos dinámicos con información completa y **perfecta**
- juegos dinámicos con información completa pero **imperfecta**

La información es perfecta si en cada momento del juego, el jugador a quien le corresponde decidir (es decir, escoger una acción) conoce la historia completa de todas las acciones escogidas hasta ese momento.

4

Juegos dinámicos con información completa y perfecta

- Su representación habitual es en forma extensiva.



El jugador 2 conoce la acción que ha escogido el jugador 1 antes de decidir *a* o *b*.

5

Las estrategias

- Conjunto de estrategias del jugador 1, S_1={*A*, *B*}
- Conjunto de estrategias del jugador 2, S_2={*aa*, *ab*, *ba*, *bb*}

b si 1 juega *A* — — *b* si 1 juega *B*

Una estrategia de un jugador es un plan de acción completo, es decir, especifica una acción factible del jugador en cada contingencia en la que al jugador le puede corresponder actuar.

6

Inducción hacia atrás

Juego en dos etapas:

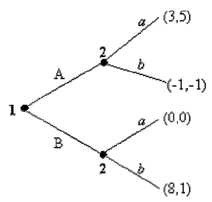
1. El jugador 1 escoge una acción s_1.
2. El jugador 2 observa y escoge s_2.
3. Las ganancias son los pagos correspondientes a las acciones s_1 y s_2.

Inducción hacia atrás

Resolución por inducción hacia atrás:

3. Determinamos los pagos en función de las estrategias.
2. El jugador 2 escoge su estrategia de mejor respuesta para cada posible elección del jugador 1, MR{s_1}.
1. El jugador 1 anticipa el comportamiento de 2 y escoge s_1 tal que (s_1, MR{s_1}) le proporcione el máximo pago.

Ejemplo 3.1



Recordemos:
S_1={A, B} y S_2={aa, ab, ba, bb}
Paso 1: MR del jugador 2
Si 1 elige A: MR_2{A}=*a*
Si 1 elige B: MR_2{B}= *b*
Estrategia de 2 s_2^* = *ab.*
Paso 2: s_1^* maximiza $u_1(s_1,ab)$.
$u_1(A,ab) = 3$
$u_1(B,ab) = 8$
El jugador 1 elige B
Equilibrio de este juego
$(s_1^*, s_2^*) = (B, ab)$
$u_1(s_1^*, s_2^*)= 8$ y $u_2(s_1^*, s_2^*)= 1$

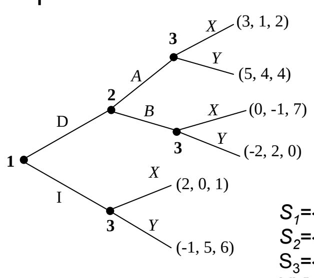
Ejemplo 3.1

Aunque la forma extensiva es más conveniente para resolver un juego dinámico, podemos ponerlo en forma normal:

1/2	aa	ab	ba	bb
A	(3,5)	(3,5)	(-1,-1)	(-1,-1)
B	(0,0)	(8,1)	(0,0)	(8,1)

Teorema:
La solución del método de inducción hacia atrás es un equilibrio de Nash del juego en forma normal.

Ejemplo 3.2



S_1={I, D},
S_2={A, B},
S_3={XXX, XXY, XYX, YXX, XYY, YXY, YYX, YYY}
X si 1 juega I
Y si 1 y 2 juegan DB
Y si 1 y 2 juegan DA

Ejemplo 3.2

Paso 1: MR del jugador 3
Si 1 elige I: MR_3{I}=*Y*
Si 1 elige D y 2 A: MR_3{D, A}= Y
Si 1 elige D y 2 B: MR_3{D, B}= X
Estrategia de 3 es s_3^* = *YYX.*
Paso 2:
2 maximiza su utilidad dado s_3^* = *YYX.*
MR_2{D, YYX} = *A.*
Paso 3:
1 maximiza su utilidad dado s_2^* =*A* y s_3^* = *YYX*
MR_1{A, YYX} = *D.*
Equilibrio de este juego
(s_1^*, s_2^*, s_3^*) = (D, A, YYX)

Ejemplo 3.2

<u>Estrategias vs acciones</u>
Una acción o movimiento es una elección que puede hacer un jugador en algún nodo suyo. Una estrategia del jugador *i* se simboliza con s_i y es un plan completo que especifica una acción para todos sus nodos.

En el ejemplo 3.2 las estrategias de equilibrio son
$(s_1^*, s_2^*, s_3^*) = (D, A, YYX)$.
Sin embargo, las acciones son:
a_1=D, a_2=A y a_3= Y.

Si los pagos (-1, 5, 6) fuesen (6,5,6) entonces las estrategias de equilibrio serían ahora:
$(s_1^{**}, s_2^{**}, s_3^{**}) = (I, A, YYX)$.
y las acciones resultantes:
$a_1' = I$ y $a_3' = Y$.

13

Ejemplo 3.2

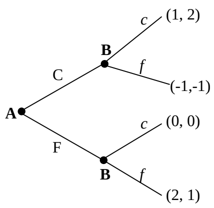
Ahora que sabemos cuáles son los conjuntos de estrategias, ¿cuál es el juego en forma normal correspondiente?

Pista:
Un jugador escoge una fila,
otro jugador escoge una columna,
y el tercer jugador escoge una matriz…

14

Ejemplo 3.3: La batalla de los sexos, versión secuencial.

La ventaja del que juega primero.



S_A={C, F} y S_B={cc, cf, fc, ff}
<u>Paso 1</u>: MR del jugador B
Si A elige C: MR_2{C}=*c*
Si A elige F: MR_2{F}= *f*
Estrategia de B $s_B^* = cf$.
<u>Paso 2</u>: s_A^* maximiza $u_A(s_A, cf)$.
$u_A(C,cf) = 1$
$u_A(F,cf) = 2$
El jugador A elige F
<u>*Equilibrio de este juego*</u>
$(s_A^*, s_B^*) = (F, cf)$ con pagos
$u_A(s_A^*, s_B^*)= 2$ y $u_B(s_A^*, s_B^*)= 1$

15

Y en otros juegos, ¿jugar primero siempre da ventaja?

Ejemplo 3.3: La batalla de los sexos, versión secuencial.

En forma normal:
Aparte de la solución (F,cf), hay otros 2 equilibrios de Nash: (C,cc) y (F,ff), pero no son buenas predicciones.
Consideremos (C,cc).

1/2	cc	cf	fc	ff
C	(1,2)	(1,2)	(-1,-1)	(-1,-1)
F	(0,0)	(2,1)	(0,0)	(2,1)

16

Ventajas del inducción hacia atrás: Eliminación de las amenazas no creíbles.

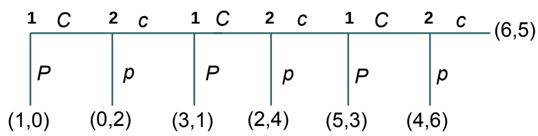
Supongamos que Berta (B) amenaza a Albert (A) con ir al cine independientemente de la acción que tome A, ¿es ésta una amenaza creíble?
Si A elige F y B cumple su amenaza, B recibiría un pago de cero en lugar de un pago de 1. Dado que los jugadores son racionales (maximizan su utilidad), una vez que A haya elegido F el jugador B preferirá no cumplir su amenaza. B escoge la estrategia que maximiza su utilidad en la segunda etapa del juego: *f*.

La solución por inducción hacia atrás elimina las amenazas no creíbles.

17

Desventajas del inducción hacia atrás: Predicción del juego, la racionalidad.

Ejemplo 3.4: El juego del ciempiés.



El jugador 1 comienza eligiendo entre parar el juego con lo que se obtienen unos pagos (1,0), o continuar, en cuyo caso la elección de parar o continuar recaería sobre el jugador 2, con la primera elección el juego se para y se obtienen los pagos (0,2), de continuar la responsabilidad de continuar o no recae en el jugador 1, alternándose hasta el final o hasta que uno de los jugadores decida parar.

18

Desventajas del inducción hacia atrás: Predicción del juego, la racionalidad

Ejemplo 3.4: El juego del ciempiés.

Predicción del juego:
El juego “no se juega nunca”!!! El jugador *1* elige P al comienzo del juego lo que le aporta un pago de *1*, el jugador *2* recibe un pago de *0*.
¿Qué ocurre si *2* observa que *1* ha elegido *C*?

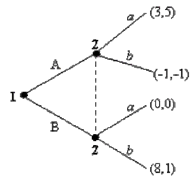
- *1* no es racional
- *1* se ha equivocado
- *1* espera que *2* siga para alcanzar el pago *(6,5)*

El supuesto de racionalidad se mantiene a lo largo del juego. No tenemos predicciones de la continuación del juego para estrategias fuera de equilibrio.

19

3.2 Juegos dinámicos con información completa pero imperfecta

Representación en forma extensiva :

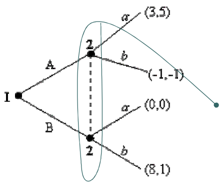


Cuando el jugador 2 elige entre *a* o *b* no sabe en que nodo se encuentra, es decir, desconoce la elección del jugador 1.
Este ejemplo en particular representa un juego estático.

20

3.2 Juegos dinámicos con información completa pero imperfecta

En los juegos dinámicos con información completa pero imperfecta los jugadores escogen de manera secuencial, pero en alguna etapa del juego algún jugador escoge una sola acción para *múltiples* nodos (suyos) de manera *simultánea*.



Es preciso introducir algunos conceptos adicionales:
Conjunto de información y

Subjuegos.

21

3.2 Juegos dinámicos con información completa pero imperfecta

Conjunto de información
Un conjunto de información de un jugador *i* es una colección de nodos de decisión tal que

1. cuando en el transcurso del juego se llega a un nodo del conjunto, el jugador *i* no sabe a qué nodo del conjunto se ha llegado y (por lo tanto)
2. el jugador *i* ha de tomar una sola decisión para todos los nodos del conjunto.

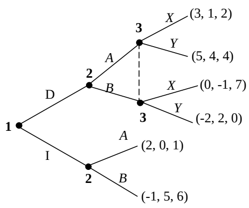
Subjuego
Un subjuego es un juego en forma extensiva, y siempre

1. empieza en un nodo de decisión *n* que sea un conjunto de información con un único elemento;
2. incluye todos los nodos de decisión y terminales que siguen a *n*;
3. no intersecta a ningún conjunto de información.

22

Subjuegos. Ejemplo 3.5

Considera la siguiente variación del Ejemplo 3.2

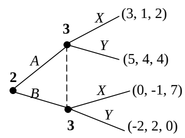


¿Cuáles son sus subjuegos?

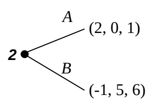
23

Subjuegos

Subjuego 1



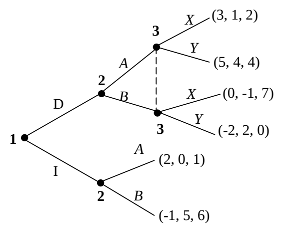
Subjuego 2



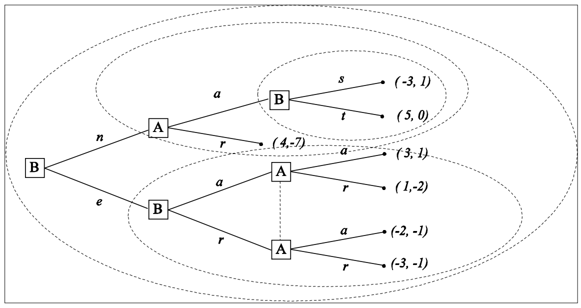
24

Subjuegos

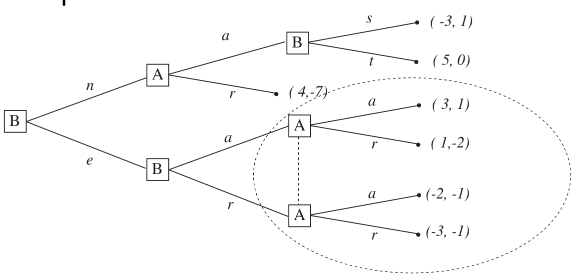
y... Subjuego 3: El juego entero!



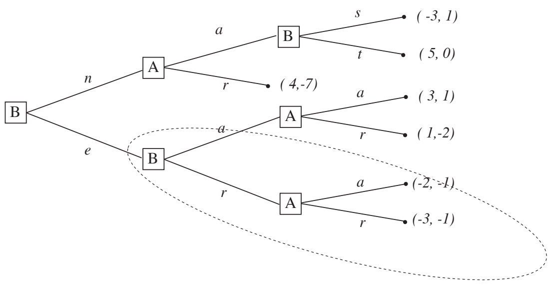
Subjuegos? Sí, son todos.



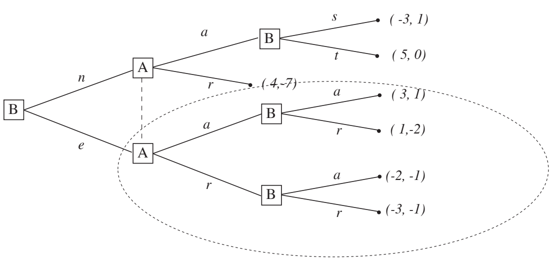
Subjuego? No. (Cond.1.)



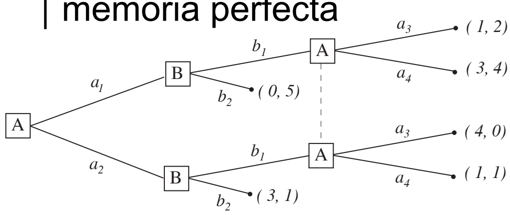
Subjuego? No. (Cond.2.)



Subjuego? No. (Cond.3.)



Conjunto de información, memoria perfecta



El jugador A no recuerda lo que ha elegido en el primer nodo de decisión!
Supondremos que esto no ocurre nunca, es decir, supondremos que todos los jugadores tienen memoria perfecta.

Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos

Definición: Un equilibrio de Nash es perfecto en subjuegos (EPS) si las estrategias constituyen un equilibrio de Nash en *cada* subjuego.

31

Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, información perfecta

En el caso de información perfecta,
el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos
se obtiene por inducción hacia atrás (y ya está!).

Ejemplo 3.1:
el **equilibrio** de Nash perfecto en subjuegos es *(B, ab)*;
el **resultado** o la **trayectoria** es el camino determinado por las acciones resultantes: *(B, b)*;
los **pagos** son *(8,1)*.

32

Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos , información imperfecta

Consideremos el Ejemplo 3.5, un juego con información imperfecta.

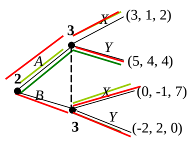
El equilibrio de Nash perfecto en subjuegos es (*D, AB, Y*).

¿Por qué?

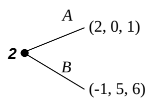
33

Equilibrio perfecto en subjuego, información imperfecta

- Subjuego 1



- Subjuego 2



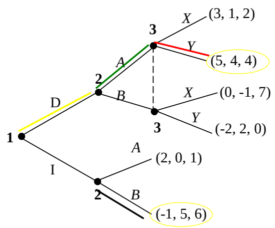
$MR_2\{X\}=A$ $MR_3\{A\}=Y$
$MR_2\{Y\}=A$ $MR_3\{B\}=X$

$MR_2\{I\}=B$

34

Equilibrio perfecto en subjuego, información imperfecta

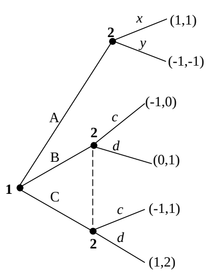
- Subjuego 3: El juego entero.



35

Ejemplo 3.6

Considérese el juego en forma extensiva.



1. Especifíquense el conjunto de estrategias puras de cada jugador.
2. Calcúlense los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos en estrategias puras.

36

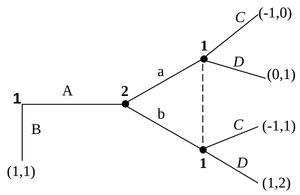
…Ejemplo 3.6

- Espacios de estrategias puras:
  $S_1=\{A, B, C\}$; $S_2=\{xc, xd, yc, yd\}$.
- Hay tres equilibrios de Nash perfecto en subjuegos:
  $(s_1^*, s_2^*) = (C, xd)$ y ….

37

Ejemplo 3.7

Considérese el juego en forma extensiva.



1. Especifíquense el conjunto de estrategias puras de cada jugador.
2. Calcúlense los equilibrios perfectos en subjuegos en estrategias puras.

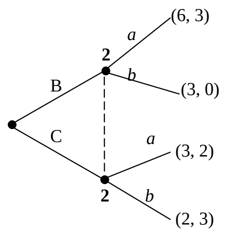
38

…Ejemplo 3.7

- Espacios de estrategias puras:
  $S_1 =\{AC, AD, BC, BD\}$; $S_2 =\{a, b\}$.
- Hay dos equilibrios de Nash perfectos en subjuegos (en estrategias puras):
  $(s_1^*, s_2^*) = (BD, b)$ y
  $(s_1', s_2') = (AD, b)$.

39

Ejemplo 3.8



- Conjuntos de estrategias puras?
- EN?
- Equilibrio perfecto en subjuegos?

40

3.3 Juegos repetidos

Supongamos que el juego del dilema del prisionero se repite dos veces:

etapa 1

A/B	***C***	***NC***
C	(-10,-10)	(0,-12)
NC	(-12,0)	(-1,-1)

etapa 2

A/B	***C***	***NC***
C	(-10,-10)	(0,-12)
NC	(-12,0)	(-1,-1)

Empezamos por la etapa 2.

41

3.3 Juegos repetidos

El único equilibrio de Nash en la segunda etapa es (*C, C*) que proporciona un pago de (-10, -10). En la primera etapa, sumando los pagos que se obtendrán en la segunda etapa, tenemos

etapa 1

A/B	***C***	***NC***
C	(-20,-20)	(-10,-22)
NC	(-22,-10)	(-11,-11)

Nota: $U_i = u_{i,t_1} + u_{i,t_2}$

Las acciones resultantes del único equilibrio perfecto en subjuegos son *CC* para ambos jugadores.

42

3.3 Juegos repetidos

Definición: Dado un juego de etapa G, G(T) denota el **juego repetido finitamente** en el que G se juega T veces, habiendo los jugadores observado los resultados de todas las jugadas anteriores antes de que empiece la siguiente. Las ganancias de G(T) son simplemente la suma de las ganancias de los T juegos de etapa.

43

3.3 Juegos repetidos

Si el juego de etapa G tiene un único equilibrio de Nash, entonces, para cualquier T finito, el juego repetido G(T) tiene un único resultado perfecto en subjuegos: en cada etapa se juega el equilibrio de Nash de G.

44

Ejemplo 3.9

Considérese el juego $G=\{S_1=S_2=\{I, C, D\}; u_1, u_2\}$ que se juega dos veces.

1/2	***I***	***C***	***D***
I	($\underline{1}$,$\underline{1}$)	($\underline{5}$,0)	(0,0)
C	(0,$\underline{5}$)	(4,4)	(0,0)
D	(0,0)	(0,0)	($\underline{3}$,$\underline{3}$)

EN= {(I, I), (D, D)}

45

Ejemplo 3.9

Y cuando tenemos múltiples equilibrios de Nash? Podemos coordinar y obtener algo "mejor"?

En la segunda etapa se jugará cualquiera de los equilibrios de Nash. En general, en la última etapa de un juego repetido finitamente siempre se juega un EN.

Supongamos que a la elección de (C, C) los jugadores responden con (D, D) en la segunda etapa y a cualquier otra elección responden con (I, I) en la segunda etapa. ¿Constituye este plan un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos?

46

Ejemplo 3.9

Etapa 1: Si en la etapa dos se juega (D, D) en respuesta a (C, C) el pago es de (3, 3). Será de (1,1) en todos los demás casos.

1/2	***I***	***C***	***D***
I	($\underline{2}$,$\underline{2}$)	(6,1)	(1,1)
C	(1,6)	($\underline{7}$,$\underline{7}$)	(1,1)
D	(1,1)	(1,1)	($\underline{4}$, $\underline{4}$)

Si jugamos (I, I), en la segunda etapa jugaremos (I, I) que proporciona un pago de (1,1). El pago final u_i= 1 + 1.
Si jugamos (C, C), en la segunda etapa jugaremos (D, D) que proporciona un pago de (3,3). El pago final u_i= 4 + 3. Etc.
Por tanto, el plan sí que constituye un equilibrio perfecto en subjuegos, con pagos superiores a los EPS "simples".

47

Ejemplo 3.9

En la primera etapa no necesariamente se juega un equilibrio de Nash. Las estrategias (C, C) no forman parte de un EN en el juego de una sola tirada. La repetición permite la cooperación para alcanzar un equilibrio Pareto superior. Sin embargo en la segunda etapa siempre se jugará un EN. (Por ello el dilema del prisionero aunque se repita *T* veces no podrá alcanzar el resultado eficiente, a menos que se repita *infinitamente*.)

48

Juegos repetidos infinitamente, dilema del prisionero

Considera el dilema del prisionero repetido infinitamente:

A/B	I_2	D_2
I_1	(1, 1)	(5, 0)
D_1	(0, 5)	(4, 4)

El factor de descuento o medida de paciencia de los jugadores es δ, $0<\delta<1$.
($\delta=1/(1+r)$, donde r es el tipo de interés)

49

Juegos repetidos infinitamente, dilema del prisionero

En el período *t* se conocen las *t-1* jugadas anteriores.

Cálculo de los pagos (*el valor actual*):

$\pi_1 + \delta\pi_2 + \delta^2\pi_3 + \delta^3\pi_4 \ldots = \sum_{t=1} \delta^{t-1}\pi_t$

Considera la siguiente estrategia del jugador *i:*

- juega D_i en la primera etapa
- en la etapa *t*, juega D_i si en todas las etapas anteriores los jugadores han jugado (D_1,D_2). En caso contrario, juega L_i.

Este perfil de estrategias es un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos si $\delta>1/4$. (¿Por qué?)

50

Dilema del prisionero, conclusiones

- La repetición finita del dilema del prisionero no amplía, en comparación con su versión de una sola tirada, las posibilidades de cooperación de los jugadores.
- En el caso en el que el dilema del prisionero se repite un número ilimitado de veces es posible materializar las posibilidades de cooperación entre los individuos si estos son suficientemente pacientes (factor de descuento suficientemente grande).

51

Juegos repetidos infinitamente

Una consecuencia de un "teorema popular" (Friedman, 1971) para el dilema del prisionero es lo que acabamos de ver:
"Si los jugadores son lo suficientemente pacientes, la cooperación puede sostenerse como un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos."

Para poder formalizar el teorema de Friedman (para *cualquier* juego de etapa G) necesitamos la siguiente definición:

Si los pagos a un jugador a lo largo del juego infinito $G(\infty,\delta)$ son $\pi_1,\pi_2,\pi_3,\ldots$ etc., entonces
el valor actual es $\pi_1 + \delta\pi_2 + \delta^2\pi_3 + \delta^3\pi_4 \ldots = \sum_{t=1} \delta^{t-1}\pi_t = \pi$
lo cual es equivalente a recibir en cada etapa
la ganancia media $(1-\delta)\pi$. (¡Compruébalo!)

52

Teorema popular, Friedman

Sea G un juego estático, finito con información completa.
Sean $(e_1,\ldots,e_n)$ los pagos de un EN de G.
Sean $(x_1,\ldots,x_n)$ unos pagos factibles, es decir, existe un perfil de estrategias σ tal que $(x_1,\ldots,x_n) = (u_1(\sigma),\ldots,u_n(\sigma))$.

Si $x_i>e_i$ para todo i y si $0<\delta<1$ es suficientemente grande, entonces hay un EPS en el juego $G(\infty,\delta)$ que proporciona al jugador i una ganancia media de x_i.

53

Teorema popular, Friedman

En la demostración:
$v_i = u_i(e_1,\ldots,e_n)$
v_i^d = pago al jugador i si da mejor respuesta a σ_{-i}.

Condición para que haya EPS que conlleva a la ganancia media x:

$$\delta > \max_i (v_i^d - x_i)/(v_i^d - v_i).$$

54

Teorema popular, Wen

Sea G un juego estático, finito con información completa.

Definición: El valor *minimax* del jugador *i*:

$$\underline{v}_i = \min_{\alpha_{-i}} \max_{\alpha_i} u_i(\alpha_i, \alpha_{-i}).$$

(puede interpretarse como una utilidad de reserva).

Otro "teorema popular", más general (Wen, 1994):

Sean $(x_1,\ldots,x_n)$ unos pagos factibles.

Si $x_i > \underline{v}_i$ para todo i y si $0<\delta<1$ es suficientemente grande, entonces hay un EPS en el juego $G(\infty,\delta)$ que proporciona al jugador i una ganancia media de x_i.

55

Teorema popular (EN) …

- Las estrategias que utiliza Wen en la demostración de su teorema son bastante complicadas. Esto es una consecuencia de querer EPS.
- Sin embargo, si solamente queremos EN, es bastante fácil construir explícitamente las estrategias...

56

… Teorema popular (EN)

Paso 1. Sea σ tal que $(x_1,\ldots,x_n) = (u_1(\sigma),\ldots,u_n(\sigma))$.

Paso 2. Para cada i, buscar $\alpha^i = (\alpha_j^i)_{j\neq i}$ tal que

$$\underline{v}_i = \max_{\alpha_i} u_i(\alpha_i, \alpha_{-i}).$$

Paso 3. Estrategia para cada jugador j:

- siempre juega σ_j,
- a no ser que observes que un único otro jugador jugador i no juegue σ_i, entonces juega la estrategia α^i_j de ahora en adelante.

57

3.4 Aplicaciones

- 1) Duopolio de Stackelberg
  - Representación forma extensiva
  - Modelo de duopolio de Stackelberg. Solución por el método de inducción hacia atrás.
  - Ejemplo con 2 empresas y función de demanda lineal:

58

3.4 Aplicaciones

Duopolio de Stackelberg

- Demanda: Sea un determinado mercado de un cierto producto homogéneo. La función inversa de demanda viene determinada por $P(Q) = \alpha - \beta Q$; $Q = q1 + q2$
- Supongamos que participan *2* empresas en el mercado identificadas con el subíndice *i*, cada empresa tiene asociada una función de costes $C_i(q_i) = c\, q_i$; $c>0$.
- Supongamos que la empresa 1 es la *líder* y la 2 la *seguidora*. La empresa líder escoge la cantidad a producir antes que la seguidora. La seguidora observa la elección de la empresa líder (información perfecta) y elige que cantidad producir.

59

3.4 Aplicaciones

- 2) Competencia oligopolística con diferenciación de producto
  - Los bienes producidos se suponen homogéneos, pero cada empresa elige el lugar físico, "localización", donde suministra el suyo (Hotelling, 1929).
  - A diferencia del modelo de Hotelling las empresas fijan el precio en una segunda etapa.
  - Los consumidores incurren en un doble costo: el del precio del bien y el costo del transporte.

60

3.4 Aplicaciones

Competencia oligopolística

- Dos empresas $i=1, 2$ producen un bien homogéneo.
- Tienen idéntica tecnología de rendimientos constantes y costo marginal $c > 0$.
- La región servida por estas empresas tiene una estructura lineal y continua, sus puntos se representan en el intervalo $[0,1]$. Los consumidores están uniformemente distribuidos en esta región.
- Cada consumidor compra una sola unidad del bien de la cual deriva una utilidad, $v > 0$. Los costes de transporte son $C(d) = q\, d^2$, $q>0$. El coste de un consumidor h de trasladarse a una empresa localizada en s_i es $C(|h- s_i|)=q(h-s_i)^2$.
- Las empresas eligen la localización y luego compiten en precios.
- Un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos es un par de localizaciones (s'_1,s'_2) y precios $(p_1(s_1,s_2),p_2(s_1,s_2))$.

61

3.5 Modelo de negociación de Stahl - Rubinstein

- Dos jugadores, 1 y 2 deben repartirse un premio cuyo tamaño normalizamos a 1.
- El proceso de negociación se lleva a cabo en un máximo de T periodos.

  Si no hay acuerdo después de T periodos entonces se acaba el proceso y cada jugador recibe un pago de cero.

  Si T=∞ existe la posibilidad de que nunca se acabe el proceso.

62

3.5 Modelo de negociación de Stahl - Rubinstein

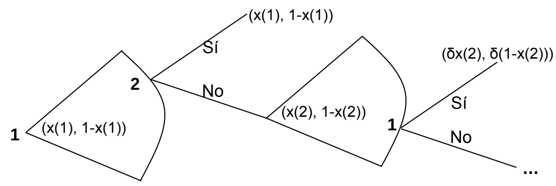
Proceso de negociación: etapas t=1,2,3,…,T

- Si t es impar: el jugador 1 ofrece una repartición (x(t), 1-x(t)), donde x(t) es la porción del premio que propone 1 le corresponde.
  - El jugador 2 acepta o rechaza la oferta.
  - Si 2 acepta la propuesta el juego termina con resultado $(\delta^{t-1}x(t),\delta^{t-1}(1-x(t)))$.
  - Si 2 rechaza la oferta pasamos a la etapa t+1 (si t+1≤T).
- Si t es par: el jugador 2 ofrece una repartición (x(t), 1-x(t)), donde x(t) es la porción del premio que propone 2 le corresponde a 1.
  - El jugador 1 acepta o rechaza la oferta.
  - Si 1 acepta la propuesta el juego termina con resultado $(\delta^{t-1}x(t),\delta^{t-1}(1-x(t)))$.
  - Si 1 rechaza la oferta pasamos a la etapa t+1 (si t+1≤T).
- Si no se llega a un acuerdo en las etapas **t=1,2,3,…,T**, entonces los jugadores reciben los pagos (0,0).

63

(Recuerda: δ<1 es un factor de descuento.)

3.5 Modelo de negociación de Stahl - Rubinstein



64

3.5 Modelo de negociación de Stahl - Rubinstein

El concepto de solución apropiado es EPS. (¿Por qué?)
(Análisis por inducción. Según T, el horizonte de negociación.)

- Si T=1: el único EPS es:
  el 1 propone (1, 0)
  el 2 acepta cualquier propuesta
- Si T=2:
  Sabemos (por el análisis de "T=1") que si el juego llega a t=2 el resultado será unos pagos de (0,1) en t=2. Por tanto el pago de 2 sería de δ1.
  Si (y sólo si) el 1 ofrece 1-x(1) ≥ δ al 2 en t=1, el 2 aceptará la propuesta.
  En t=1, el 1 ofrecerá exactamente 1-x(1) = δ.
- Si T=3:
  Sabemos (por el análisis de "T=2") que si el juego llega a t=2 el resultado será unos pagos de (δ, 1-δ) en t=2. Por tanto el pago de 2 sería de δ(1-δ).
  Si (y sólo si) el 1 ofrece 1-x(1) ≥ δ(1- δ) al 2 en t=1, el 2 aceptará la propuesta.
  En t=1, el 1 ofrecerá exactamente 1-x(1) = δ(1- δ)= $\delta-\delta^2$.

65

3.5 Modelo de negociación de Stahl - Rubinstein

- ….
- Si T=3:
  Sabemos (por el análisis de "T=2") que si el juego llega a t=2 el resultado será unos pagos de (δ, 1-δ) en t=2.
  Por tanto el pago de 2 sería de δ(1-δ).
  Si (y sólo si) el 1 ofrece 1-x(1) ≥ δ(1- δ) al 2 en t=1, el 2 aceptará la propuesta.
  En t=1, el 1 ofrecerá exactamente 1-x(1) = δ(1- δ)= $\delta-\delta^2$.
- Si T=4:
  Sabemos (por el análisis de "T=3") que si el juego llega a t=2 el resultado será unos pagos de $(\delta-\delta^2, 1-\delta+\delta^2)$ en t=2.
  Por tanto el pago de 2 sería de $\delta\,[\,1-\delta+\delta^2\,] = \delta-\delta^2+\delta^3$.
  Si (y sólo si) el 1 ofrece 1-x(1) ≥ $\delta-\delta^2+\delta^3$ al 2 en t=1, el 2 aceptará la propuesta.
  En t=1, 1 ofrecerá exactamente 1-x(1) = $\delta-\delta^2+\delta^3$.
- ….

66

3.5 Modelo de negociación de Stahl - Rubinstein

El único equilibrio perfecto en subjuegos del proceso lleva a un acuerdo inmediato en t = 1 sobre la propuesta

$(x(1), 1-x(1)) = (1-\delta+\delta^2-\delta^3+\ldots+(-1)^{T-1}\delta^{T-1},$

$\delta-\delta^2+\delta^3-\delta^4+\ldots+(-1)^T\delta^{T-1}).$

O, equivalentemente,

$$\left(\frac{1-(-1)^T\delta^T}{1+\delta}, \frac{\delta-(-1)^{T+1}\delta^T}{1+\delta}\right).$$

67

3.5 Modelo de negociación de Stahl - Rubinstein

El único equilibrio perfecto en subjuegos es:

En cada t=1,…,T:

(a) Si el jugador i es el que propone en t, demanda para él $\frac{1-(-1)^{T-t+1}\delta^{T-t+1}}{1+\delta}$

y ofrece la cantidad complementaria para j≠i.

(b) Si el jugador i es el que responde en t, acepta de j≠i cualquier propuesta que le otorgue al menos

$$\frac{\delta-(-1)^{T-t+2}\delta^{T-t+1}}{1+\delta}$$

y rechaza cualquier otra propuesta.

68

3.5 Modelo de negociación de Stahl - Rubinstein

Si consideramos *equilibrios de Nash*, cualquier acuerdo, por asimétrico que este sea, define un EN del juego de negociación descrito.

Ejemplo para T par:

(i) En cada t = 1, 3, 5, …, T-1:
- El jugador 1 propone (1, 0);
- El jugador 2 rechaza la propuesta (x, 1-x) si x≠0.

(ii) En cada t = 2, 4, 6, …, T:
- El jugador 2 propone (0, 1);
- El jugador 1 acepta toda propuesta (x, 1-x).

El anterior ejemplo constituye un EN. El juego termina en la etapa 2 donde 1 acepta la propuesta de 2, los pagos serán de (0, δ).

Este sin embargo no es EPS porque en los subjuegos en los que 1 ha propuesto darle al 2 una cantidad 1-x > δ, el 2 no debe rechazar (ya que luego recibirá como máximo el pago descontado δ).

69

3.5 Modelo de negociación de Stahl - Rubinstein

Considerando el único equilibrio perfecto en subjuegos y tomando $T \to \infty$:

En cada t=1,2,…:

(A) Si el jugador i es el que propone en t, demanda para él $\frac{1}{1+\delta}$

y ofrece la cantidad complementaria para j≠i.

(B) Si el jugador i es el que responde en t, acepta de j≠i cualquier propuesta que le otorgue al menos

$$\frac{\delta}{1+\delta}$$

y rechaza cualquier otra propuesta.

70

3.5 Modelo de negociación de Stahl - Rubinstein

… lo cual lleva a un acuerdo inmediato en t = 1 sobre la propuesta

$$(x(1), 1-x(1)) = \left(\frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta}\right).$$

Podemos demostrar que para el caso $T = \infty$ las estrategias descritas en (A) y (B)

- efectivamente constituyen un SPE,
- y que no hay otro SPE.

71